1.- Utilitzeu el teorema dels residu per calcular el valor de k sabent que divisió $\frac{2x^3+kx+1}{x+2}$ té de residu -5.

El teorema del residu afirma que:
Si P(x) és un polinomi. $Residu\ \frac{P(x)}{x-a} = P(a)$
Per tant

$$\operatorname{Re}s\ \frac{2x^3+kx+1}{x+2} = 2(-2)^3 + k(-2) + 1 = -16 - 2k + 1 = -2k - 15$$

Si volem que sigui -5, -2k-15 = -5 ⇒ k = -5

2.- Utilitzeu el teorema dels residu per calcular el valor de k si el polinomi $P(x) = 2x^4 + (k+1)x^3 - 3kx + 3k$ és divisible per $x + \sqrt{3}$.

P(x) divisible per $x+\sqrt{3} \iff Res\ \frac{P(x)}{x+\sqrt{3}} = 0$; i com pel teorema del residu
$Res\ \frac{P(x)}{x+\sqrt{3}} = P(-\sqrt{3}) \Longrightarrow P(-\sqrt{3}) = 0$
Calculem $P(-\sqrt{3}) = 2(-\sqrt{3})^4 + (k+1)(-\sqrt{3})^3 + 3k\sqrt{3} + 3k =$
$= 18 - 3k\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3k\sqrt{3} + 3k = 18 - 3\sqrt{3} + 3k$.
Per tant $18 - 3\sqrt{3} + 3k = 0 \Longrightarrow 3k = -18 + 3\sqrt{3} \Longrightarrow k = -6 + \sqrt{3}$.

3.- Utilitzant el teorema del residu, trobeu el valor de m si el polinomi $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + m\cdot x + m$ entre $x + \sqrt{3}$ té de residu 3.

Pel teorema del residu
$res\,\frac{P(x)}{x+\sqrt{3}} = P(-\sqrt{3}) \Rightarrow 2\cdot(-\sqrt{3})^3 - 5\cdot(-\sqrt{3})^2 + m\cdot(-\sqrt{3}) + m = 3 \Rightarrow$
$-6\cdot\sqrt{3} - 15 - m\cdot\sqrt{3} + m = 3 \Rightarrow m\cdot(-\sqrt{3}+1) = 18 + 6\sqrt{3} \Rightarrow$
$m = \frac{18+6\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} = \frac{(18+6\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+1)}{(-\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1)} = \frac{18\cdot\sqrt{3}+18+18+6\cdot\sqrt{3}}{-3+1} = \frac{24\cdot\sqrt{3}+36}{-2} = -12\sqrt{3} - 18$

4.- Opereu i doneu el valor el màxim simplificat possible

a) $\frac{1}{1+\frac{x}{4}} - \frac{1}{1-\frac{x}{4}} + \frac{x-4}{4+x} + \frac{\frac{4}{x}+\frac{x}{4}}{\frac{4}{x}-\frac{x}{4}}$. b) $\frac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}} + \frac{1}{1+\frac{x}{a}} - \frac{1}{1-\frac{x}{a}}$

c) $\frac{\frac{x}{3}-\frac{3}{x}}{3x^2-12} \cdot \frac{3x^2-6x}{2x+6} - \frac{3x-x^2}{6x^2+12x}$ e) $5\cdot\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{x}}{x^2-25}\cdot(x^3+7x^2+7x-15) - \frac{x^2+3x+2}{x+1}$

a) $\frac{1}{1+\frac{x}{4}} - \frac{1}{1-\frac{x}{4}} + \frac{x-4}{4+x} + \frac{\frac{4}{x}+\frac{x}{4}}{\frac{4}{x}-\frac{x}{4}}$.

$$\frac{1}{1+\frac{x}{4}} - \frac{1}{1-\frac{x}{4}} + \frac{x-4}{4+x} + \frac{\frac{4}{x}+\frac{x}{4}}{\frac{4}{x}-\frac{x}{4}} = \frac{1}{\frac{4+x}{4}} - \frac{1}{\frac{4-x}{4}} + \frac{x-4}{4+x} + \frac{\frac{16+x^2}{4x}}{\frac{16-x^2}{4x}} =$$

$$= \frac{4}{4+x} - \frac{4}{4-x} + \frac{x-4}{4+x} + \frac{16+x^2}{16-x^2} = \frac{4(4-x)}{(4+x)(4-x)} - \frac{4(4+x)}{(4-x)(4+x)} + \frac{(x-4)(4-x)}{(4+x)(4-x)} + \frac{16+x^2}{16-\ \ ^2} =$$

$$= \frac{16-4x-16-4x-x^2+8x-16+16+x^2}{16-x^2} = 0.$$

b) $\frac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}} + \frac{1}{1+\frac{x}{a}} - \frac{1}{1-\frac{x}{a}}$

$$\frac{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}}{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}} + \frac{1}{1+\frac{x}{a}} - \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{\frac{a^2+x^2}{a\cdot x}}{\frac{a^2-x^2}{a\cdot x}} + \frac{1}{\frac{a+x}{a}} - \frac{1}{\frac{a-x}{a}} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} + \frac{a}{a+x} - \frac{a}{a-x} =$$

$$= \frac{a^2+x^2+a^2-a\cdot x-a^2-a\cdot x}{a^2-x^2} = \frac{a^2-2\cdot a\cdot x+x^2}{a^2-x^2} = \frac{(a-x)^2}{(a+x)\cdot(a-x)} = \frac{a-x}{a+x}$$

c) $\frac{\frac{x}{3}-\frac{3}{x}}{3x^2-12} \cdot \frac{3x^2-6x}{2x+6} - \frac{3x-x^2}{6x^2+12x}$

$$\frac{\frac{x}{3}-\frac{3}{x}}{3x^2-12} \cdot \frac{3x^2-6x}{2x+6} - \frac{3x-x^2}{6x^2+12x} = \frac{\frac{x^2-9}{3x}}{3(x^2-4)} \cdot \frac{3x(x-2)}{2(x+3)} - \frac{x(3-x)}{6x(x+2)} =$$

$$= \frac{(x+3)(x-3)}{3\cdot 3x\cdot(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3x(x-2)}{2(x+3)} - \frac{x(3-x)}{6x(x+2)} = \frac{x-3}{6\cdot(x+2)} - \frac{3-x}{6(x+2)} =$$

$$= \frac{x-3-3+x}{6\cdot(x+2)} = \frac{2(x-3)}{6(x+2)} = \frac{x-3}{3(x+2)} .$$

d) $5 \cdot \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{x}}{x^2-25} \cdot (x^3+7x^2+7x-15) - \frac{x^2+3x+2}{x+1}$

Factoritzem $x^3+7x^2+7x-15$

	1	7	7	-15
1		1	8	15
	1	8	15	0

$x^3+7x^2+7x-15 = (x-1)\cdot(x^2+8x+15)$

Com $x^2+8x+15=0 \implies x = \frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2} = \frac{-8\pm 2}{2} = \begin{cases}-3\\-5\end{cases}$

Per tant $x^3+7x^2+7x-15 = (x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+5)$

Des composem ara x^2+3x+2

$x^2+3x+2=0 \implies x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases}-1\\-2\end{cases}$.

$x^2+3x+2 = (x+1)\cdot(x+2)$

Per tant el càlcul demanat és:

$$5 \cdot \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{x}}{x^2-25}(x^3+7x^2+7x-15) - \frac{x^2+3x+2}{x+1} =$$

$$5\frac{\frac{x-5}{5x}}{(x+5)(x-5)}(x-1)(x+3)(x+5) - \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} =$$

$$= 5\frac{\frac{x-5}{5x}}{(x+5)(x-5)}(x-1)(x+3)(x+5) - \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot(x-1)(x+3) - (x+2) = \frac{(x-1)(x+3)-x(x+2)}{x} =$$

$$= \frac{x^2+2x-3-x^2-2x}{x} = \frac{-3}{x} .$$

5.- Calculeu el valor de $\left(\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{15}{\sqrt[4]{625}}\right)^2$.

$$\left(\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{15}{\sqrt[4]{625}}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}-\sqrt{2}+\frac{15}{5}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3}-\sqrt{2}+3\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{3}-\sqrt{2}+3\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{3}-\sqrt{2}+3\right)^2=\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}+3\right)^2=$$

$$=\left(3\sqrt{2}+3-\sqrt{2}+3\right)^2=\left(2\sqrt{2}+6\right)^2=8+24\sqrt{2}+36=44+24\sqrt{2}$$

6.- Dues formigues estan al vèrtex d'un quadrat i es posen a caminar a la mateixa velocitat; mentre una dona voltes al quadrat resseguint-ne els costats, l'altra va endavant i endarrere seguint la diagonal.
Quan es tornaran a trobar?
En hi ha prou en veure que si es troben serà en un vèrtex amb el que un haurà recorregut un espai d'un nombre enter de costats i l'altra un nombre irracional de costats. Com porten la mateixa velocitat i ha transcorregut el mateix temps, això no és possible.

7.- Resoleu les equacions:

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+19}=8$ b) $\sqrt{4x+4}-\sqrt{x+1}=x-5$

c) $\sqrt{2+x}+5=\sqrt{x-3}$ d) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+2}=2$

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+19}=8$

És clar que :

$\sqrt{x+3}=8-\sqrt{x+19}$

Elevant els dos membre al quadrat

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(8-\sqrt{x+19}\right)^2$

$x+3=64-16\sqrt{x+19}+x+19$

$-80=-16\sqrt{x+19}$

Simplificant:

$5=\sqrt{x+19}$

Tornant a elevar al quadrat:
$25 = x + 19$
Isolant $x = 25 - 19 = 6$.
I si substituïm a l'equació inicial veiem que la solució és vàlida.

b) $\sqrt{4x+4} - \sqrt{x+1} = x - 5$
$\sqrt{4x+4} - \sqrt{x+1} = x - 5$
$2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x - 5$
$\sqrt{x+1} = x - 5$
Elevant els dos membres al quadrat:
$x + 1 = (x-5)^2$
$x + 1 = x^2 - 10x + 25$
$x^2 - 11x + 24 = 0$
Resolent l'equació $x = \frac{11 \pm \sqrt{121-9}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$
Com
$\sqrt{4 \cdot 8 + 4} - \sqrt{8+1} = \sqrt{36} - \sqrt{9} = 6 - 3 = 3 = 8 - 5 \implies$
x=8 es solució
$\sqrt{4 \cdot 3 + 4} - \sqrt{3+1} = \sqrt{16} - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2 \neq 3 - 5 \implies$
x=3 no és solució

c) $\sqrt{2+x} + 5 = \sqrt{x-3}$
Elevant els dos membres al quadrat operant obtenim
$\left(\sqrt{2+x} + 5\right)^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2$
$2 + x + 10\sqrt{2+x} + 25 = x - 3$
$10\sqrt{2+x} = -30$
$\sqrt{2+x} = -3$
Tornant a elevar al quadrat
$2 + x = 9 \Rightarrow x = 7$.
Però quan comprovem la solució, veiem que
$\sqrt{2+7} + 5 = \sqrt{9} + 5 = 3 + 5 = 8 \neq \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$
Per tant aquesta equació no té solució real.

d) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+2} = 2$
Elevant els dos membres al quadrat
$2x + 8 - 2 \cdot \sqrt{(2x+8) \cdot (x+2)} + x + 2 = 4$
operant:
$3x + 6 = 2 \cdot \sqrt{(2x+8) \cdot (x+2)}$
és a dir:
$3x + 6 = 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 12x + 16}$
elevant al quadrat
$(3x+6)^2 = 4(2x^2 + 12x + 16)$
$9x^2 + 36x + 36 = 8x^2 + 48x + 64$
$x^2 - 12x - 28 = 0$
I per tant

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144+112}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{12 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{28}{2} = 14 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Com

$\sqrt{2 \cdot 14 + 8} - \sqrt{14 + 2} = \sqrt{36} - \sqrt{16} = 6 - 4 = 2$

$\sqrt{2 \cdot (-2) + 8} - \sqrt{-2 + 2} = \sqrt{4} - \sqrt{0} = 2 - 0 = 2$

Les dues solucions són vàlides

8 - Resoleu les equacions

a) $3^x - 3^{1-x} = 2$

b) $3^{x+6} + 3^{x+4} + 3^{x+2} = 91$

c) $5^{2x} = 24 \cdot 5^x + 25$

d) $5^{x+1} - 6 \cdot 5^x + 5^{x-1} = -24$.

e) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$

a) $3^x - 3^{1-x} = 2$

Per les propietats de les potències l'equació és:

$3^x - \frac{3}{3^x} = 2$

Multiplicant per 3^x

$3^{2x} - 3 = 2 \cdot 3^x$

i per tant:

$3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

equació de 2n grau que resolent-la

$$3^x = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

I per tant

$3^x = 3 \implies x = 1 \textit{ solució vàlida}$

metre que $3^x = -1$ $\textit{sol no valida}$

b) $3^{x+6} + 3^{x+4} + 3^{x+2} = 91$

Per les propietats de les potències l'equació és:

$3^6 \cdot 3^x + 3^4 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x = 91$

$3^x(3^6 + 3^4 + 3^2) = 91$

$3^x(3^6 + 3^4 + 3^2) = 91$

$3^x(729 + 81 + 9) = 91$

$3^x \cdot 819 = 91$

$3^x = \frac{91}{819} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \implies x = -2$ Sol vàlida.

c) $5^{2x} = 24 \cdot 5^x + 25$

$5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25 = 0$

equació de 2n grau que resolent-la

$$5^x = \frac{24 \pm \sqrt{576+100}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{24 \pm 26}{2} = \begin{cases} \frac{50}{2} = 25 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

I per tant

$5^x = 25 \implies x = 2 \textit{ solució vàlida}$

metre que $5^x = -1$ *sol no valida*

d) $5^{x+1} - 6\cdot 5^{x} + 5^{x-1} = -24$.

$5^{x+1} - 6\cdot 5^{x} + 5^{x-1} = -24$

Operant $5 \cdot 5^x - 6 \cdot 5^x + \frac{1}{5} \cdot 5^x = -24$

$\left(5 - 6 + \frac{1}{5}\right) \cdot 5^x = -24$

$\frac{-4}{5} \cdot 5^x = -24 \Longrightarrow\ 5^x = 5 \cdot \frac{24}{4}\ \Longrightarrow\ 5^x = 30\ \Longrightarrow x = log_5 30$

e) $9^x - 8\cdot 3^{x} = 9$

Per les propietats de les potències l'equació és:

$3^{2x} - 8\cdot 3^{x} = 9 \quad \Rightarrow\ (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

Resolent l'equació

$$3^x = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-18}{2} = -9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \ \Rightarrow x = 0 \\ 3^x = -9\ no\ té\ sol\ real \end{cases}$$

9- Resoleu les equacions:

a) $2\log x - \log(4x + 5) = 0$

b) $\log 4 + 2\log(x-3) = \log x$

c) $5 \log x = \log 125 + \log x^2$

d) $\log (25-x^3) - 3 \log(4-x) = \log 1$.

e) $2\cdot\log (2x)^2 - 3 \log x = 1$

a) $2\log x - \log(4x + 5) = 0$

$\log x^2 = \log(4x + 5) \ \Rightarrow\ x^2 = 4x + 5 \ \Rightarrow\ x^2 - 4x - 5 = 0 \ \Rightarrow$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

i substituint a l'equació inicial veiem que -1 no és solució vàlida i la 5 si.

b) $\log 4 + 2\log(x-3) = \log x$

$2\log(x-3) - \log x = -\log 4$

$\log\frac{(x-3)^2}{x} = \log\frac{1}{4} \Longrightarrow$

$\frac{(x-3)^2}{x} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 4(x^2 - 6x + 9) = x$

$4x^2 - 24x + 36 = x\ \Longrightarrow 4x^2 - 25x + 36 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625+5}}{8} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8} = \begin{cases} \frac{32}{8} = 4 \\ \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Com

$\log 4 + 2\log(4 - 3) = \ \log 4 + 2 \cdot 0 = \log 4\ \Longrightarrow x = 4\ \ Sol\ vàlida$

$\log 4 + 2\log\left(\frac{9}{4} - 3\right) = \log 4 + 2 \cdot \log\frac{-3}{4}$ $que\ no\ està\ definit$

$\Longrightarrow x = \frac{9}{4}$ $Sol\ no\ vàlida$

c) 5 log x = log 125 + log x^2

$5 \cdot \log x = \log 125 + 2 \cdot \log x \quad \Longrightarrow$

$3 \cdot \log x = \log 125 \quad \Longrightarrow \log x^3 = \log 125 \Longrightarrow \log x^3 = \log 5^3$

$x = 5$. Sol vàlida.

d) log (25-x^3) – 3 log(4-x) = log 1.

Com $n \cdot \log A = \log A^n$

$$\log(25 - x^3) - \log(4 - x)^3 = 0$$

Operant

$$\log(25 - x^3) = \log(4 - x)^3$$

Traient antilogaritmes

$$25 - x^3 = (4 - x)^3$$

Operant

$$25 - x^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

$$12x^2 - 48x + 39 = 0$$

Resolent l'equació

$x = \frac{48 \pm \sqrt{2304-187}}{24} = \frac{48 \pm \sqrt{432}}{24} = \frac{48 \pm 12\sqrt{3}}{24} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ les dues vàlides.

e) 2·log $(2x)^2$ – 3 log x = 1

Operant

4·log(2x) – 3log x = 1

4·(log 2 + log x) – 3·log x = 1

4·log 2 + 4 log x – 3· log x = 1

log x =1 – 4· log 2

log x = log 10 – log 16

log x = log 10/16

x = 10/16 = 5/8

10.- Resoleu les inequacions:

a) $4x-5 < 2x + 3$

b) $\mathbf{x^2 + 2x > x + 6}$.

c) $2x^2 + x \geq 3$

d) $\dfrac{x-5}{x+1} \geq 0$

a) $4x-5<2x+3$

$4x-2x<3+5 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x<4$

Sol $(-\infty,4)$

b) $\mathbf{x^2 + 2x > x + 6}$.

$\mathbf{x^2 + 2x - x - 6 > 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 > 0}$

factoritzem $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

La inequació és $(x+3)\cdot(x-2)>0$

Estudiem el signe de cada factor i finalment del producte

		-3		2	
x+3	-	|	+		+
x-2	-		-	|	+
(x+3)·(x-2)	+	|	-	|	+

Per tant la solució de la inequació és $(-\infty,-3) \cup (2,\infty)$

c) $2x^2 + x \geq 3$

Consideren $2x^2 + x - 3 \geq 0$

Factoritzem $2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1\pm5}{4} = \begin{cases} -3/2 \\ 1 \end{cases}$

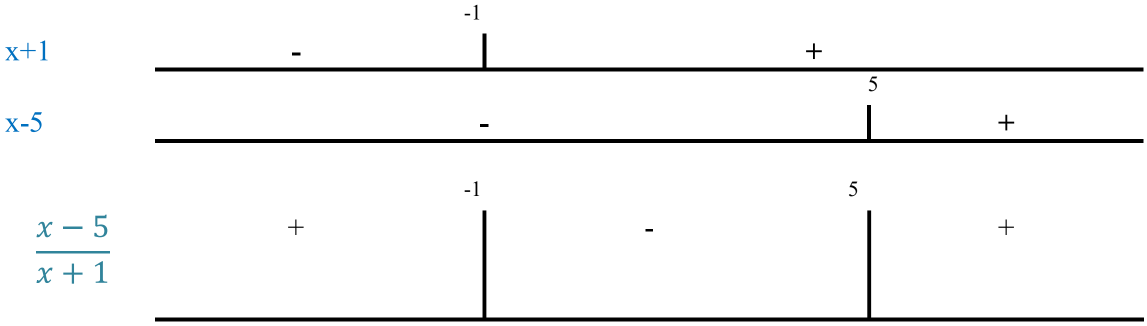
La inequació és $2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot (x-1) \geq 0$

		$\frac{-3}{2}$		1	
$x+\frac{3}{2}$	-	|	+		+
$x-1$	-		-	|	+
$\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$	+	|	-	|	+

Per tant la solució de la inequació és $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, \infty[$

d) $\dfrac{x-5}{x+1} \geq 0$

Estudiem el signe del numerador i del denominador.



Com ens interessa ≥ 0 i el denominador no pot ser 0 la solució la solució és $(-\infty.-1) \cup [5,\infty)$

11.- Trobeu la suma dels 15 primers termes d'una progressió geomètrica on el segon terme és -96 i el terme 7 és 729 .

Com a una progressió geomètrica $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, tenim que: $\begin{cases} -96 = a_1 \cdot r \\ 729 = a_1 \cdot r^6 \end{cases}$.

Dividint $\frac{-96}{729} = \frac{a_1 \cdot r}{a_1 \cdot r^6} \Rightarrow \frac{-3 \cdot 2^5}{3^6} = \frac{1}{r^5} \Rightarrow r^5 = -\frac{3^5}{2^5} \Rightarrow r = -\frac{3}{2}$

i com $-96 = a_1 \cdot r \Rightarrow a_1 = \frac{-96}{-\frac{3}{2}} = 64$.

$a_{15} = a_1 \cdot r^{15-1} = 64 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{14} = 2^6 \cdot \frac{3^{14}}{2^{14}} = \frac{3^{14}}{2^8}$.

Finalment com la suma dels n primers termes és $S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$,

la suma dels 15 primers termes és

$$S = \frac{\frac{3^{14}}{2^8} \cdot \frac{-3}{2} - 64}{-\frac{3}{2} - 1} = \frac{-\frac{3^{15}}{2^9} - 64}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{14381675}{512}}{\frac{5}{2}} = \frac{14381675}{256 \cdot 5} = \frac{2876335}{256} .$$

12.- Trobeu x sabent que: $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 27 + \ldots + 4 \cdot 3^x = 118096$.

Traient 4 factor comú

$4 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^x) = 118096$

simplificant

$1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^x = 29524$

que és la suma dels termes d'una progressió geomètrica de raó 3 ⇒

$29524 = \frac{3^x \cdot 3 - 1}{3-1} \Rightarrow 3^x \cdot 3 = 2 \cdot 29524 + 1 \Rightarrow 3^{x+1} = 59049 = 3^{10}$

$\Rightarrow x+1 = 10 \Rightarrow x = 9$.

13.- Trobeu el valor de $8 - 4 + 2 - 1 + 0.5 - 0.25 + 0.125 - 0.0625 + \ldots$.

Es clar que a la succió 8, -4, 2, -1, 0.5, -0.25. 0.125, -0.0625...

Cada terme és el seu anterior dividit per -2 ; és doncs una progressió geomètrica de raó $\frac{-1}{2}$ i la suma de tots els seus termes és

$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{8}{1-\frac{-1}{2}}=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$.

14.- Calculeu el valor $6-2\sqrt{3}+2-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\sqrt{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}\sqrt{3}\ldots$.

Com $6\,,-2\sqrt{3}\,,2\,,-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,,\frac{2}{3}\,,-\frac{2}{9}\sqrt{3}\,,\ \frac{2}{9}\ -\frac{2}{27}\sqrt{3}\ldots$

formen una progressió geomètrica de primer terme 6 i raó $\frac{-\sqrt{3}}{3}$, se'ns demana la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de primer terme 6 i raó $\frac{-\sqrt{3}}{3}$.

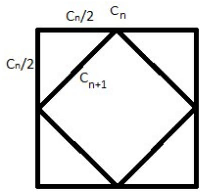
Com $\left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right|<1$ si $S=6-2\sqrt{3}+2-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\sqrt{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}\sqrt{3}\ldots$

$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{6}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{6}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}=\frac{18}{3+\sqrt{3}}=\frac{18\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}=\frac{18\cdot(3-\sqrt{3})}{9-3}=3\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)$.

15.- Considerem un quadrat Q_1 de costat 2 cms. Unint els punts mitjans de cada costat obtenim un altre quadrat Q_2. Unint els punts mitjans dels costats de Q_2 obtenim un altre quadrat.Q_3. Procedim així indefinidament.

a) Si P_n és el perímetre del quadrat Q_n , raoneu que P_1, P_2, P_3, ... formen una progressió geomètrica i trobeu el seu terme general.
b) Què val la suma dels perímetres dels infinits quadrats que es formen?.

Si C_n és el costat del quadrat Q_n , tenim que pel T de Pitàgores



$C_{n+1}^2=\left(\frac{C_n}{2}\right)^2+\left(\frac{C_n}{2}\right)^2 \Longrightarrow$

$C_{n+1}^2=2\frac{C_n^2}{4} \Longrightarrow C_{n+1}=\sqrt{\frac{C_n^2}{2}} \Longrightarrow C_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot C_n$

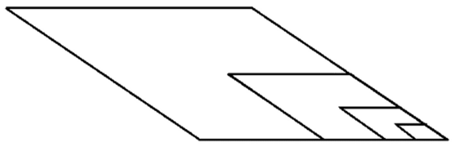
Per tant la longitud del costat de cada quadrat és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ el costat del quadrat anterior, per tant la successió de les longituds dels costats C_n és una progressió geomètrica de primer terme 2 i raó $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Com el perímetre de cada quadrat $P_n=4\cdot C_n$,
la successió P_n és uns progressió geomètrica de primer terme
$P_1=4\cdot C_1=4\cdot 2=8$ i raó $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Amb el que la suma dels perímetres dels infinits quadrats és

$S=\frac{8}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1}=\left(16+8\sqrt{2}\right)cms$.

16.- Un rombe R_1 té de costat 10 cms i un dels angles interiors amida 30º; unint els punts mitjans de cada costat fins a la diagonal, obtenim un nou rombe R_2 amb els mateixos angles; si unim els punts mitjans del nou rombe fins la seva diagonal obtenim un nou rombe R_3 .

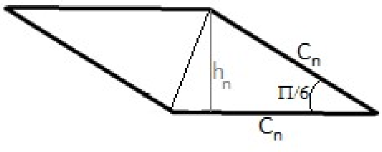


Procedim així indefinidament i obtenim una successió de rombes R_n .
Tal i com indica la figura.

a) Raoneu que els perímetres d'aquets rombes formen un progressió geomètrica i doneu-ne la raó. Que val la suma dels perímetres de tos aquests rombes?
b) Raoneu que les àrees d'aquests rombes formen una progressió geomètrica i doneu-ne la raó. Qui valor té la suma de les àrees dels infinits rombes?

Tal i com s'han construït els rombes, cadascun té un costat que amida la meitat del costat del rombe anterior i té els mateixos angles.
Per tant si c_n = costat del rombe n $= 10/2^n$,
La successió dels perímetres serà: $P_n = 4 \cdot c_n$ és a dir 40 cms, 20 cms, 10 cms ....
Successió que és una progressió geomètrica de primer terme 40 i raó ½
i la suma de tots el perímetres serà$Suma\ perímetres = \frac{40}{1-\frac{1}{2}} = \frac{40}{\frac{1}{2}} = 80\ cms$.

Estudiem les àrees.



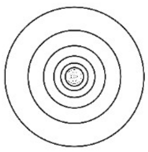
$$A_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} C_n \cdot h_n\right) = C_n \cdot h_n =$$
$$= C_n \cdot C_n \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{10}{2^n} \cdot \frac{10}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = 50 \cdot \frac{1}{4^n}$$

Que

Que clarament formen uns progressió geomètrica de primer terme 50 i de raó $\frac{1}{4}$
Per tant la suma de les àrees és

$$Suma\ àrees = \frac{50}{1-\frac{1}{4}} = \frac{50}{\frac{3}{4}} = \frac{200}{3} cms^2$$

15.-.- Considerem $\mathbf{C_n}$ una successió de circumferències, on el radi de la primera té 2m i que el radi de cada una és 1/3 del radi de la seva anterior.
Trobeu:
a) La suma dels perímetres de totes les circumferències.
b) La suma de les àrees de totes les circumferències.



Si r_n és el radi de la circumferència n, tenim que r_n és una progressió geomètrica de primer terme 2 i raó 1/3.

a) La longitud d'una circumferència és $2\pi r \Rightarrow$
la longitud de la circumferència n és $2\pi r_n$, amb el que la successió de les longituds serà una progressió geomètrica de primer terme $2 \cdot \pi \cdot 2 = 4 \cdot \pi$ i raó 1/3;
amb el que la suma de totes les longituds és:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2\pi r_n = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot \pi}{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \pi\ ms$$

b) Com l'àrea del cercle C_n limitat per la circumferència n és $\pi \cdot r_n^2$ i la successió dels quadrats dels radis compleix que:

$$r_n^2 = \left(r_{n-1} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = r_{n-1}^2 \cdot \frac{1}{9}$$

$\Rightarrow$ és una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{9}$ i primer terme $\pi \cdot 2^2 = 4 \cdot \pi$.

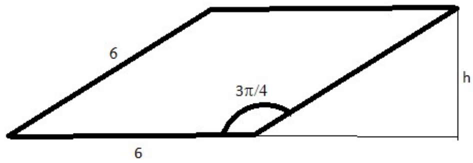
Amb el que la suma de les àrees és

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi r_n^2 = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{9}} = \frac{4\cdot\pi}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{2}\pi\ m^2$$

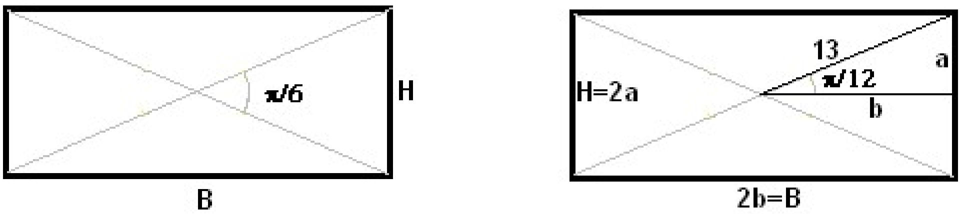
17.- Trobeu l'àrea d'un rombe de costat 6m, sabent que un dels seus angle interiors és de $3\pi/4$.

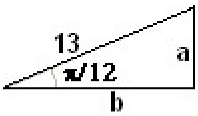
$$A = base\cdot altura = 6\cdot h =$$

$$= 6\cdot 6\cdot \sin\frac{\pi}{4} = 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}\,m^2$$



18.- Les diagonals d'un rectangle amiden 26 cm. i l'angle que formen és de $\pi/6$. Trobeu la superfície i el perímetre d'aquest rectangle.





$$a = 13\cdot\sin\frac{\pi}{12} \qquad b = 13\cdot\cos\frac{\pi}{12}$$

Area rectangle = B·H = 2b·2a .

$$\text{Area rect} = 2\cdot 13\cdot\sin\frac{\pi}{12}\cdot 2\cdot 13\cdot\cos\frac{\pi}{12} = 2\cdot 13^2\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 2\cdot 13^2\cdot\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$\text{Area rect} = 2\cdot 13^2\cdot\frac{1}{2} = 13^2 = 169\ cm^2$$

Perímetre = 4a + 4b $\Rightarrow$ $\text{Per} = 4\cdot 13\cdot\sin\frac{\pi}{12} + 4\cdot 13\cdot\cos\frac{\pi}{12} \Rightarrow$

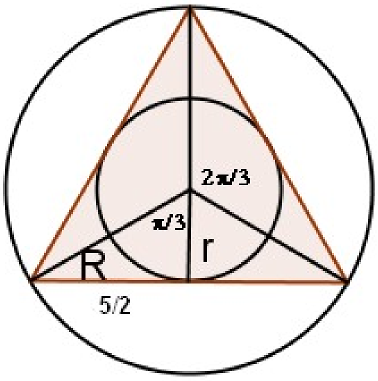
$$\text{Per} = 4\cdot 13\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} + 4\cdot 13\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} \Rightarrow$$

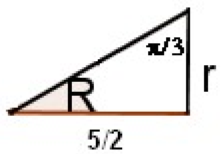
$$\text{Per} = 4\cdot 13\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + 4\cdot 13\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = 4\cdot 13\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} + 4\cdot 13\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow$$

$$\text{Per} = 4\cdot 13\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\text{Per} = 2 \cdot 13 \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} \right) cm \,.$$

19.- Trobeu l'àrea de la corona circular formada pels cercles inscrit i circumscrit a un triangle equilàter de costat 5m.





on és clar que : $\frac{5}{2} = R \cdot \sin\frac{\pi}{3}$ i $r = R \cdot \cos\frac{\pi}{3}$.

$$\frac{5}{2} = R \cdot \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow R = \frac{5}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$r = R \cdot \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \,.$$

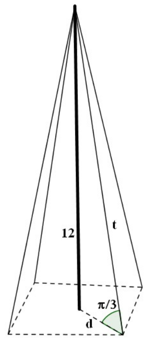
Amb el que $A_C = \pi R^2$

$$A_C = \pi R^2 = \pi \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{25\pi}{3} m^2$$

$$A_I = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{25\pi}{4 \cdot 3} = \frac{25\pi}{12} m^2$$

$$\text{Area corona} = A_C - A_I = \frac{25\pi}{3} - \frac{25\pi}{12} = \frac{25\pi}{4} m^2$$

20.- Per reforçar l'estabilitat d'una torre de 12 m d'altura li volem posar quatre cables tensors que vagin des de el punt més alt de la torre fins a quatre punts del terra, que coincideixin amb els vèrtex d'un quadrat del que el peu de la torre n'és el centre.
Si volem que l'angle que formin aquests tensors amb el terra sigui de $\pi/3$ rad. Quina longitud de cable tensor necessitarem?
A quina distància del peu de la torre estaran les fixacions dels tensors?



Si **t** és la longitud d'un tensor i **d** és la distancia del peu de la torre a una de les fixacions tenim que:

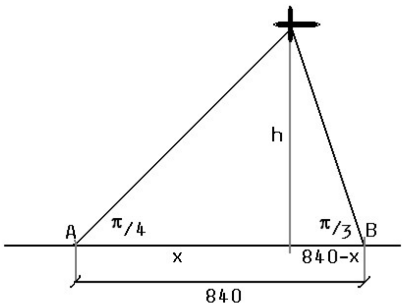
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{12}{t} \Longrightarrow t = \frac{12}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 3}{\sqrt{3}} = 8\cdot\sqrt{3} \cong 13.86m$$

Com hi ha 4 tensors necessitarem $\cdot 32\cdot\sqrt{3} \cong 55.43m$

$$tg\,\frac{\pi}{3} = \frac{12}{d} \Longrightarrow \quad d = \frac{12}{tg\,\frac{\pi}{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\cdot\sqrt{3} \cong 6.93m\ .$$

21.- Dues persones separades 840 m veuen un avió que les sobrevola amb angles d'elevació de $\pi/3$ i $\pi/4$. A quina altura vola l'avió?.

Se'ns formen dos triangles rectangles que tenen en comú l'altura.



Al primer triangle:

$$tg\,\frac{\pi}{4} = \frac{h}{x} \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{h}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = h$$

Al segon triangle

$$tg\,\frac{\pi}{3} = \frac{h}{840-x} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{h}{840} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{840-h} \Longrightarrow \quad \sqrt{3}\cdot(840-h) = h \quad \Longrightarrow$$

$$\sqrt{3}\cdot 840 - \sqrt{3}\cdot h = h \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3}\cdot 840 = \sqrt{3}\cdot h + h \Longrightarrow$$

$$\sqrt{3}\cdot 840 = \left(\sqrt{3}+1\right)\cdot h \Longrightarrow$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\cdot 840}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}\cdot 840\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)} = \frac{840\cdot(3-\sqrt{3})}{2} = 420(3-\sqrt{3})\ \text{ m.}$$